JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij

20. lipnja 2011.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.
Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!
Rezultati i uvid u kolokvije: **utorak, 21. lipnja 2011. u 12 sati**.

1

Zadatak 1

(20 bodova.) Napišite definiciju **dijagonalne dominantnosti po stupcima** za kvadratnu matricu A reda n.

(a) Ako je matrica $A = A^{(1)}$ dijagonalno dominantna po stupcima, što vrijedi za matrice $A^{(k+1)}$ **na kraju** k-tog koraka Gaussovih eliminacija?

(b) Može li **parcijalno** pivotiranje dati drugačiju konačnu matricu $R = A^{(n)}$? Ukratko argumentirajte ovaj odgovor.

(c) Što vrijedi za elemente matrice L u LR faktorizaciji matrice A **bez** pivotiranja, odnosno, s **parcijalnim** pivotiranjem?

(d) Navedite **primjer** numeričkog problema koji se rješava linearnim sustavom s dijagonalno dominantnom matricom (može i po recima).

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

20. lipnja 2011.

(20 bodova.) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 13 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 39 \\ 19 \\ -28 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 3

20. lipnja 2011.

(15 bodova.) Nađite kubični splajn s koji interpolira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	-3	-1	1	3
y_i	2	1	1	2

.

Za nalaženje splajna iskoristite "not-a-knot" (nije čvor) rubni uvjet. Izračunajte vrijednost interpolacijskog splajna u točki $x = 0$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 4

20. lipnja 2011.

(20 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \mathrm{sh}(px)$$

na intervalu $[-1, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 5

20. lipnja 2011.

(20 bodova.) Zadan je integral

$$\int_2^3 (2x-5)^2 \ln x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 6

20. lipnja 2011.

(15 bodova.) Nađite najmanje rješenje jednadžbe

$$\operatorname{ch} x = 2 - \frac{1}{x-2}$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij

20. lipnja 2011.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **utorak, 21. lipnja 2011. u 12 sati**.

1

Zadatak 1

(20 bodova.) Težinska integracijska formula ima oblik

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx = I_n(f) + E_n(f), \qquad I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k),$$

gdje su x_k čvorovi integracije, a w_k su težinski koeficijenti.

(a) Napišite definiciju **polinomnog** stupnja egzaktnosti d ovakve integracijske formule.

(b) Što znači da je integracijska formula **interpolacijska**?

(c) Napišite iskaz teorema o **karakterizaciji** integracijskih formula "visokog" stupnja egzaktnosti, kad je $d > n-1$.

(d) Koliki je **maksimalni** stupanj egzaktnosti? Ukratko komentirajte zašto.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

20. lipnja 2011.

(20 bodova.) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & 17 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 3

20. lipnja 2011.

(15 bodova.) Nađite kubični splajn s koji interpolira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	-3	-2	2	3
y_i	1	2	2	1

.

Za nalaženje splajna iskoristite "not-a-knot" (nije čvor) rubni uvjet. Izračunajte vrijednost interpolacijskog splajna u točki $x = 0$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 4

20. lipnja 2011.

(20 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin(px)$$

na intervalu $[-1, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 5

20. lipnja 2011.

(20 bodova.) Zadan je integral

$$\int_3^4 (3x-8)^2 \ln x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 6

20. lipnja 2011.

(15 bodova.) Nađite najveće rješenje jednadžbe

$$\operatorname{sh} x = 1 + \frac{2}{x+1}$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!